Одинец Владимир Петрович

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МОДЕЛИ МАРКОВА И КЛИНИ

В 1949 г. сын знаменитого российского математика А.А. Маркова (1856–1922) Андрей Андреевич Марков (младший) (1903–1979) создал свою вычислительную модель, столь же наглядную, как и ленточные автоматы Поста и Тьюринга, но использующую меньшее число команд (см. [4; 6]).

Напомним, что в этой модели в качестве структуры данных выступает список символов, то есть последовательность ячеек переменной конечной, но неограниченной длины, в которые помещаются символы конечного алфавита. Иными словами, состояние конечной модели описывается на каждом шаге словом над некоторым алфавитом. При этом программа нормального алгоритма

А.А. Марков

представляет собой упорядоченный список команд, каждая из которых имеет один из двух форматов:

$A \to B$ (замена в текущем слове подслова[1] A на слово B),

$A \to| B$ (замена в текущем слове подслова A на слово B и окончание выполнения программы).

Команда в модели Маркова считается применимой к данному слову, если ее левая часть является подсловом этого слова.

Результатом применения команды к слову становится новое слово, отличающееся от исходного тем, что первое слева вхождение подслова A заменено словом B.

Очередной шаг в модели Маркова заключается в том, чтобы в списке команд найти первую, применимую к текущему слову. При этом использовать ее и остановиться в случае команды второго формата и приступить к выполнению следующего шага в случае команды первого формата. В качестве правой или левой части команды может выступать и пустое слово Λ. Первое его вхождение в текущее слово определено как место перед крайним левым символом.

Например, пусть дан алфавит $\{a, b\}$ и пусть задан алгорифм Маркова над этим алфавитом формата: $a \to b$. Этот алгорифм меняет первую слева букву «а» обрабатываемого слова на букву «в», пока команда не перестанет быть применимой, то есть алгорифм заменяет все буквы «а» исходного слова на буквы «в» [6].

---

[1] Слово «с» является подсловом слова «в», если «в» представимо в виде $b = lar$, где l и r некоторые, возможно, пустые слова. (Пустое слово будем обозначать через Λ).

Что же послужило толчком к появлению нормального алгорифма Маркова? Это связано прежде всего с развитием конструктивной математики, берущей свое начало в трудах Лейтзен Эгберта Яна Брауэра (Luitzen Egbert Jan Brouwer Luitzen Egbert Jan: 1881–1966)[1] и Германа Вейля (Hermann Weyl: 1885–1955) [7]. Их критические тезисы об имевших хождение в тот период теоремах существования, не «предъявлявших» конкретного объекта, фактически были направлены против «жонглирования» понятием актуальной бесконечности. Они выступили инициаторами создания математики (прежде всего математического анализа), в которой в качестве объектов изучения фигурируют лишь конструктивно определяемые объекты. (Такое направление в математике было названо интуиционизмом) (см. [7; 8; 10]).

К сожалению, достаточно длительное неприятие большинством математического сообщества этих идей, ограничивающих, по мнению многих математиков, математический инструментарий, привело к определенным трудностям в изучении основ самой математики.

А.А. Марков высказал в 40-х гг. мысль о том, «что различные идеализации, фактически применяемые в современной математике, далеко не одинаковы с точки зрения возможности содержательного истолкования математических теорем, в основе которых лежат эти идеализации». В настоящее время имеется реальная возможность осуществлять пересмотр основ анализа. Она обеспечивается разработанностью теорий, связанных с точным определением таких понятий, как «вычислимая арифметическая функция» и «алгорифм» [6, с. 315–316].

В этой связи следует сказать, нормальный алгорифм Маркова позволяет строить по заданным алгорифмам новые алгорифмы, обладающие заданными свойствами[2].

В приведенной выше цитате А.А. Маркова упомянута «вычислимая арифметическая функция». Ясность в ее определение и значение для теории алгоритмов внесла работа 1945 г. Стивена Коула Клини (Stephen Cole Kleene: 1909–1994) «Об истолковании интуиционистской теории чисел»[3].

А.А. Маркова не удовлетворяло и понятие мощности бесконечных множеств, когда часть может быть равномощна целому множеству.

По этому поводу отметим, что обойти трудности актуальной бесконечности математики попытались с помощью нестандартного анализа (подробнее см. [1; 9]). Но пока в этой области реальные новые результаты[4] еще сравнительно скромны.

Другой подход возник на рубеже XX и XXI вв. и связан с работами нижегородского математика Ярослава Дмитриевича Сергеева (р. 1963). Он придумал арифметику, восходящую к идеям итальянских математиков последней трети XIX в., включая У. Дини (1845–1918), Д. Пеано (1858–1932), и объединяющую конечные и бесконечные числа[5]. В основе этой арифметики лежит

Д.Я. Сергеев

---

[1] *Brouwer L.E.J.* Intuitionisme en formalisme. Amsterdam, 1912.

[2] А.А. Марков был разносторонним математиком. Основные труды у него были по топологии, топологической алгебре, теории динамических систем, конструктивной математике и теории алгоритмов (= алгорифмов).

[3] *Kleene S.C.* On the interpretation of intuitionistic number thory // J. Symb. Logic. 10 (1945). P. 109–124.

[4] *Ловягин Ю.Н.* Гиперрациональные числа как основа математического анализа // Вестник Сыктывкарского ун-та, 2007. Сер. 1. Вып. 7. С. 17–34.

[5] Не путать с порядковыми числами.

понятие гросс-единицы (grossone). Гросс-единица – это бесконечное число, обозначаемое через Ф, равное по определению количеству элементов в $\mathbb{N}$ – множестве натуральных чисел, то есть $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ..., Ф - 1, Ф\}$, а Ф – самое большое натуральное число[2].

Это число выбирается в качестве основания новой системы счисления. Множество конечных и бесконечных чисел можно раскрыть как

$\hat{\mathbb{N}} = \{1, 2, 3, ..., Ф - 1, Ф, Ф + 1, ..., Ф^2 - 1, Ф^2, Ф^2 + 1, ...\}$.

Отметим, что множество всех четных положительных чисел содержит Ф/2 чисел.

Через 1/Ф обозначают простейшее по записи бесконечно малое число.

Важным постулатом для арифметики Сергеева является следующий: ***любой процесс суммирования содержит не более Ф шагов***[3].

Вернемся теперь вновь в 1936 г. Кроме работ Поста и Тьюринга о ленточных автоматах, о которых шла речь выше, в этот год появились две работы С.К. Клини «Общие рекурсивные функции натуральных чисел» [11] и «Определяемость и рекурсивность»[4].

В этих работах Клини уже практически отвечает Э. Посту, который написал в своей работе «Финитные комбинаторные процессы» [2]: «Автор ожидает, что его формулировка (то есть вычислимость по Посту) окажется логически эквивалентной рекурсивности в смысле Геделя-Черча».

Напомним, что три следующие функции называют *простейшими.* Число в верхнем индексе будет означать количество переменных. Сами функции – это функции нескольких натуральных переменных со значениями из множества

$\mathbb{N} = \mathbb{N}_0 \cup \{0\}$.

Итак:

1) $0^{(1)}(x) = 0$ – обнуление;

2) $s^{(1)}(x) = x + 1$ – инкремент;

3) $I_n^{(m)}(x_1, ..., x_n, ..., x_m) = x_n$, $(1 \le n \le m)$ – выбор (или проекция).

Функцию называют *частично рекурсивной*, если она получается из простейших с помощью применения конечного числа трех операций: суперпозиции, примитивной рекурсии и минимизации. Оператор ввода:

$$(g^{(n)}(x_1, ..., x_n), h^{(n+2)}(x_1, ..., x_{n+2})) \xrightarrow{p} f^{(n+1)}(x_1, ..., x_{n+1})$$

$$f^{(n+1)}(x_1, ..., x_n, 0) = g^{(n)}(x_1, ..., x_n)$$

$$f^{(n+1)}(x_1, ..., x_n, y+1) = \\ = h^{(n+2)}(x_1, ..., x_n, y, f^{(n+1)}(x_1, ..., x_n, y))$$

будем называть оператором примитивной рекурсии.

Функцию называют *общерекурсивой*, если она частично рекурсивна и всюду определена.

Наконец, *примитивно рекурсивными* называют функции, получаемые из простейших с помощью конечного числа применений операторов суперпозиции и примитивной рекурсии.

Впервые общерекурсивная функция, не являющаяся примитивно рекурсивной, была построена учеником Д. Гильберта Вильгельмом Аккерманом (Wilhelm Ackermann: 1896–1962) в бытность его еще студентом, но доказательство того, что она не будет примитивно рекурсивной, им дано только в 1928 г. Широко распространенное в информатике видоизменение функции Аккермана, зависящей уже только от двух аргументов, принадлежит Руже Петер (Политцер) (Rózsa Péter: 1905–1977) и Рафаэлю Робинсону (Raphael Mitchel Robinson: 1911–1995) (см. [5, с. 5]).

Функция двух переменных Аккермана-Петер имеет следующий вид:

$$A(m,n) = \begin{cases} n+1, & при\ m = 0, n \ge 0 \\ A(m-1, 1), & при\ m > 0, n = 0 \\ A(m-1, A(m, n-1)), & при\ m \ge 1, n \ge 1 \end{cases}$$

$(m, n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\})$.

Поскольку вычислительная модель Клини, то есть теория частично рекурсивных функций, не похожа на вычислительную модель, то напомним, что структурой данных

[2] Роль Ф фактически сравнима в вычислительных процессах с ролью бесконечно большого числа M в M-задачах при использовании симплекс-метода.

[3] *Sergeyev Ya.D.* Arithmetic of infinity. Edizioni Orizzonti Meridionali. CS, 2003.

[4] *Kleene S.K.* Definability and recusiveness // Duke Math. J., 1936. Vol. 2. P. 340–353.

этой модели служит список конечных подмножеств множества натуральных чисел, предполагая, что список имеет конечную, но, вообще говоря, неограниченную длину, а командой называют один из трех операторов (суперпозиции, примитивной рекурсии и минимизации), примененных к списку частичнорекурсивных функций.

Отметим, что А.А. Марков дополнил существенно теорему С.К. Клини о представлении частично рекурсивных функций через примитивно рекурсивные, точнее, им дана полная характеризация примитивно рекурсивных функций, допустимых в качестве внешней функции в формуле С.К. Клини[1] (см. [10]).

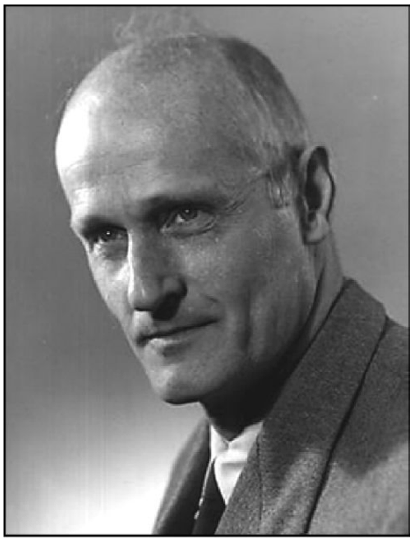
А теперь несколько слов о творцах теории рекуррентных функций: С.С. Клини, В. Аккермане, Р. Петер и Р. Робинсон, а также о научном руководителе С.К. Клини – профессоре Алонзо Черче (Alonzo Church: 1903–1995).

***

А. Черч родился в Вашингтоне в семье судьи. Степень бакалавра получил в Принстонском университете в 1924 г. Степень Ph. D. там же – в 1927 г. Затем один год преподавал в университете Чикаго. Позже по одному году был на стажировке в университетах Гарварда, Геттингена и Амстердама. Начиная с 1929 г. Черч преподает в университете Принстона (до 1967 г.), а затем в Калифорнийском университете в Лос-Анджелесе (до 1990 г.). После статьи 1936 г. [3], в которой были продемонстрированы алгоритмически неразрешимые задачи, Черч построил теорию λ-исчисления, которое имело свойства, одинаковые с машиной Тьюринга[2].

***

Стивен Коул Клини (Stephen Cole Kleene: 1909–1994) родился и жил в США. В 1930 г. он получил степень бакалавра в Амхерст Колледже, а степень Ph. D. в 1934 г. в Принстонском университете, где его научным руководителем был Алонзо Черч.



Стивен Клини

С 1935 г. С. К. Клини был связан с университетом Висконсин-Мэдисон. В 1939–1941 гг. он был на стажировке в Принстонском Институте Перспективных исследований. Когда США стали участвовать во Второй мировой войне (1941–1945 гг.), С.К. Клини служил в Военно-морском флоте США в качестве инструктора по навигации. В 1961 г. С.К. Клини избирается президентом Международного Союза Историков и философов Науки [13]. Наиболее знаменита его книга «Введение в метаматематику».

***

Вильгельм Аккерман (Wilhelm Ackermann: 1896–1962) – немецкий математик. Он поступил в университет в Геттингене в 1914 г., продолжил там же учебу после Первой мировой войны. В 1925 г. под руководством Д. Гильберта он защищает диссертацию и получает степень Ph. D. В течение четырех лет (с перерывом на поездку в Кэмбридж на полгода как Рокфеллеровский стипендиат) В. Аккерман исполняет обязанности секретаря Д. Гильберта. С 1929 по 1948 г. и с 1949 по 1961 г. В. Аккерман работает

[1] *Kleene S.* On the forms of the predicates in the theory of constructive ordinals // Amer. J. Math. Vol. 66 (1944) (см. также [12]).

[2] *Enderton H.B.* In memorian: Alonzo Church // The Bull. of Symbol. Logic. Vol. 1. № 4 (Dec. 1995). P. 486–488.

Вильгельм Аккерман

учителем в гимназии Арнольдинум (Arnoldinum) в Бургштайнфурте и затем в Люденшайде[1]. В 1957 г. выходит его знаменитая книга: «Философские замечания относительно математической логики и исследований оснований математики», сразу переведенная и на английский язык [14]. За работы по теории множеств и основаниям логики В. Аккерман был избран почетным профессором университета в Мюнстере.

***

Ружа Петер (Rózsa Péter в девичестве Politzer) (1905–1977), поступив в Университет Эствос Лоранд, намеревалась изучать химию, но, начав слушать лекции всемирно известного математика Липота Фейера (Lipót Feier: 1880–1959), заинтересовалась математикой. Другой математик Лашло Кальмар (László Kalmar: 1905–1976) впервые обратил ее внимание на рекурсивные функции. В 1932 г. на IX Математическом Конгрессе в Цюрихе была представлена ее работа, в которой исследователь впервые предложила выделить изучение рекурсивных функций в отдельное направление. В 1935 г. Ружа Петер получает степень Ph. D., и ее приглашают в журнал «Symbolic Logic» редактором. Во время Второй мировой войны она была в Будапештском гетто, чудом выжила. После войны Ружа Петер преподает в педагогическом колледже, а затем с 1955 г. она уже профессор университета, в котором когда-то училась. В 1951 г. выходит ее монография «Рекурсивные функции», а в 1976 г. – знаменитая книга «Recursive Functions in Computer Theory». Именно выход этой книги способствовал использованию функции Акермана-Петер для графического изображения всевозможных поверхностей, использующихся в строительстве, навигации и в военном деле.

Ружа Петер

***

Другим видоизменением оригинальной функции Аккермана занялся ***Рафаэль Митчелл Робинсон*** (Raphael Mitchel Robinson: 1911–1995). Он родился в Калифорнии. В 1932 г. получил степень бакалавра, а в 1935 г. – Ph. D. Обе степени – по математике в Университете Беркли. Вскоре после 1942 г. начинается его интенсивная работа над теорией «существенной неразрешимости» А. Тарского (в 1939 г. Тарский переезжает из Польши в США), завершившаяся изданием в 1953 г. совместного труда «Неразрешимые теории»[1]. (В 1941 г. Р.М. Робинсон женится на своей бывшей студентке Джулии Баумэн (Julia (Bowman) Robinson: 1919–1985), ставшей самой известной женщиной-математиком второй половины XX в., первой женщиной-президентом Американско-

[1] *Remus D.* Professor Wilhelm Ackerman, Lehrer am Arnoldinum und Forscher in der Mathematik // 400 Jahre Arnoldinum 1588–1988. Festschrift. – Greven, 1988. S. 211–219.

го Математического общества.) Отметим еще его работы (1952 г.) по компьютерному изучению чисел Мерсенна, то есть простых чисел вида $M_n = 2^n - 1$. Проблема существования бесконечного множества чисел Мерсенна до сих пор не решена.

Упражнения

Составить протоколы Алгорифмов Маркова для следующих задач:

1.
$ca \to aec$
$cb \to bc$
$c \to d$
$ea \to ae$
$eb \to be$
$ed \to da$
$d \to| \Lambda$
$\Lambda \to c$

2.
$ca \to abc$
$cb \to bc$
$c \to| \Lambda$
$\Lambda \to a$

3.
$ga \to ag$
$gb \to bg$
$g \to d$
$ea \to ae$
$eb \to be$
$fa \to af$
$fb \to bf$
$ed \to da$
$fe \to db$
$ca \to ce$
$cb \to cf$
$cd \to| \Lambda$
$\Lambda \to cg$

Литература

1. *Одинец В.П.* Зарисовки по истории математики. Сыктывкар: Изд-во КГПИ, 2005.

2. *Post E.L.* Finite combinatore processes-formulation 1 // The Jour. of Symbolic Logic. T. 1. № 3 (1936). P. 103–105. (В русском переводе: *Эмиль Л. Пост.* Финитные комбинаторные процессы, формулировка 1).

3. *Chups A.* An unsolvable problem of elementary number theory // Amer. J. Math. 1936. Vol. 58. № 2. P. 345–363.

4. *Марков А.А.* Теория алгорифмов // Труды МИАН СССР. Т. 38 (1951). С. 176–179. (См. также: *Марков А.А.* Избранные труды. М. : Изд-во МЦНМО, 2003. Т. II. С. 32–43).

5. *Одинец В.П., Поспелов М.В.* Введение в теорию алгоритмов: учебное пособие. Сыктывкар: Изд-во КГПИ, 2006.

6. *Марков А.А.* Теория алгорифмов // Труды МИАН СССР. Т. 42 (1954). С. 3–375.

7. *Вейль Г.* О философии математики / пер. с нем. А. П. Юшкевича. М.–Л. : ГТТИ, 1934.

8. *Гейтинг А.* Интуиционизм. М.: Мир, 1965. (Перев. с англ.: Heyting A. Intuitionism. An Introduction. Amsterdam: North-Holland Publishing Co., 1965).

9. *Ловягин Ю.Н.* Исчисление бесконечно малых Г.В. Лейбница в современном изложении, или Введение в нестандартный анализ А. Робинсона. Сыктывкар: Изд-во Сыкт. лесн. ин-та, 2001.

10. *Нагорный Н.М.* Андрей Андреевич Марков и его конструктивное направление в математике // А. А. Марков. Избранные труды / сост. Н. М. Нагорный. М.: Изд-во МЦНМО, 2002. Т. 1. С. V–XLVIII.

11. *Kleene S.K.* General recursive function of natural numbers // Math. Ann. Bd. 2. 112 (1936). P. 727–742.

12. *Клини С.* Введение в метаматематику. М.: ИЛ, 1957. (Пер. с англ.: Kleene S.K. Introduction to Metamathematics. Amsterdam: D. Van Nostrand, 1952).

13. *O'Connor J.J., Robertson E.F.* Stephen Cole Kleene. MacTutor History of Mathematics archive. St. Andrews (Scottland) : University of St. Andrews, 1997.

14. *Ackermann W.* Philosophische Bemerkungen zur mathematischen Logik und zur mathematischen Grundlagenforschung. Ratio, Band 1, 1957.

---

[1] *Tarski A., Mostowski A., Robinson R.M.* Undecidable theories. Amsterdam: North Holland, 1953.

Одинец Владимир Петрович,
Коми государственный педагогический институт,
Сыктывкар.